①

Διάλεξη 4η

18/10/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Πρόοδος (τέλη Νοέμβρη) θα μετρήσει: 20-40%.

Δεν είναι υποχρεωτική

$(E): \; y'(t) + p(t)y(t) = q(t) \quad , p, q \in C(I), \; t_0 \in I$

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\left[y(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(s) e^{\int_{t_0}^{s} p(u)du} ds\right]$$

Εφαρμογές: ① $y'(t) + p\,y(t) = q \quad , p, q \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R}, \; t_0 \in \mathbb{R}$

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\left[y(t_0) + \int_{t_0}^{t} q \cdot e^{\int_{t_0}^{s} p\,du} \cdot ds\right]$$

$$= e^{-p(t-t_0)}\left[y(t_0) + q\underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{p(s-t_0)} ds}_{\left.\frac{e^{p(t-t_0)}}{p}\right|_{s=t_0}^{s=t}}\right] \quad \underline{p \neq 0}$$

$$= e^{-p(t-t_0)}\left[y(t_0) + q\left(\frac{e^{p(t-t_0)}}{p} - \frac{1}{p}\right)\right]$$

$$= e^{-p(t-t_0)} y(t_0) + \frac{q}{p} \cancel{e^{-p(t-t_0)} e^{p(t-t_0)}}^{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = e^{-p(t-t_0)} y(t_0) + \frac{q}{p} \quad , \; t \in \mathbb{R}, \; p \neq 0}$$

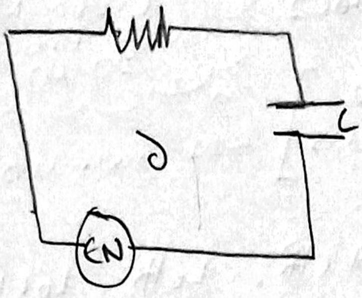
αν $p > 0$: $\lim_{t \to +\infty} e^{-p(t-t_0)} = 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{p}{q}$

Για $P=0$: $y'(t)=q$

$$y(t) = y(t_0) + q(t-t_0)$$

(2)

$R = U = RI$



$$R\overset{=Q'(t)}{I} + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

$$Q'(t) + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{p}\,Q(t) = \underbrace{\frac{E(t)}{R}}_{q}$$

__Άσκηση:__

$ay'+by = k\cdot e^{-\lambda x}$, $a,b,k>0$, $\lambda \geq 0$

$y' + \frac{b}{a}y = \frac{k}{a}e^{-\lambda x}$

Νδο: όταν $t=0$ ότι $y(x) \to \frac{k}{b}$

και όταν $\lambda>0$ ότι $y(x) \to 0$

__Λύση__

$$y(t) = e^{-\int_0^t \frac{b}{a}ds}\left[y(0) + \int_0^t k e^{-\lambda s} e^{\int_0^s \frac{b}{a}du} ds\right]$$

$$= e^{-\frac{b}{a}t}\left[y(0) + k\int_0^t e^{-\lambda s} e^{b/a\cdot s} ds\right]$$

$$= e^{-\frac{b}{a}t}\left[y(0) + k\int_0^t e^{(\lambda+\frac{b}{a})s} ds\right]$$

Για $\lambda=0$: $y(t) = y(0)e^{-b/a\cdot t} + e^{-b/a t}\underbrace{\int_0^t e^{b/a\cdot s}ds}_{\frac{e^{\frac{b}{a}\cdot t}}{\frac{b}{a}}}$

$$y(t) = \cancel{y(0)e^{-\frac{b}{a}\cdot t}}^{\to 0} + \frac{b}{a}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Άσκηση:

$$y' + by = \sin(ax), \quad a \neq 0, b \neq 0$$

$$y(x) = e^{-\int_0^x b\,ds}\left[y(0) + \int_0^x \sin(a\cdot s)\, e^{\int_0^s b\,du}\, ds\right]$$

$$= e^{-bx} y(0) + e^{-bx}\int_0^x \sin(a s)\, e^{bs}\, ds, \quad x \in \mathbb{R}$$

$= \ldots\ldots$ (κάνω 2 ολοκληρώσεις κατά παράγοντες)

$$= y(0)e^{-bx} + e^{-bx}\left[\frac{e^{bx}}{a^2+b^2}\left(b\sin(ax) - a\cos(ax)\right)\right] \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|y(x)| \leq y(0)e^{-bx} + e^{-bx} e^{bx} \frac{|a|+|b|}{a^2+b^2}, \quad b > 0$$

$$y(x) = ce^{-bx} + \frac{1}{a^2+b^2}\left(b\sin(ax) - a\cos(ax)\right), \quad x \to +\infty$$

$$y(x) = c\cdot e^{-bx} + \frac{1}{a^2+b^2}\underbrace{\frac{b}{\cos\theta}}\sin(ax - \theta)$$

$\neq 0$, διότι ανήκει στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και εκεί το συνημ. δεν μηδενίζει ποτέ!

Ταλαντώνονται οι λύσεις;

Απαντ. : ΝΑΙ!

Παράδειγμα 2, σελ 31 (βιβλίο):

$$xy' - 2y = -x^2 \quad , \quad y(1) = 0 \;//\; x>0$$

$$y' - \frac{2}{x}y = -x$$

$$\to x^2 y' - 2xy = -x^3$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 y' - 2xy}{x^4} = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x^2}\right)' = -\frac{1}{x}$$

άρα $$\frac{y(x)}{x^2} - \frac{y(1)}{1^2} = -\int_1^x \frac{1}{s}\,ds$$

$$y(x) = -x^2 \ln|x| \quad , \quad x>0$$

π.χ.

$$y' + (\tan x)\,y = \sin x$$
$$y(15) = 7.$$

(*) αρχικά σκεφτόμαστε το πεδίο ορισμού, να βρω διότι η εφαπτομένη μηδενίζει σε ορισμένα σημεία//

$$\to \frac{\cos x \cdot y' + \sin x\, y}{\cos x} = \sin x$$

$$\int \left(\frac{y}{\cos x}\right)' = \int \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{y}{\cos x} = -\log|\cos x| + C$$

$$\boxed{y = \cos x\,[-\log|\cos x| + C]}$$

Άσκηση

$y' + py = q$, $p, q \in C([0,+\infty))$

$\exists x_0 \geq 0, b > 0$: $p(x) \geq b$, $\forall x \geq x_0$.

$\lim_{x \to +\infty} q(x) = 0$

Να βρεθούν όλες οι λύσεις $\to 0$ για $x \to +\infty$.

Λύση

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}\left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s)\, e^{\int_{x_0}^{s} q(u)\,du}\, ds\right], \quad x \geq 0$$

$b < p(s)$

$$b(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} b\, ds \leq \int_{x_0}^{x} p(s)\, ds$$

$$-b(x-x_0) \geq -\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds$$

$$\underbrace{e^{-b(x-x_0)}}_{\downarrow\, 0} \geq \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}}_{\geq 0,\ \downarrow\, 0}$$

από Θ. ισοσυγκλ. $e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds} \to 0$

$$0 \leq |y(x)| = \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}}_{0} \underbrace{\int_{x_0}^{x} |q(s)|\, e^{\int_{x_0}^{s} p(u)\,du}\, ds}_{+\infty} \to 0, \quad x \geq x_0$$

0 · φραγμένη

$\Downarrow$

άρα το όριο ίσο 0

$$\frac{\int_{x_0}^{x} \left[|q(s)|\, e^{\int_{x_0}^{s} p(u)\,du}\right] ds}{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}}$$

$$= \frac{|q(x)|\, e^{\int_{x_0}^{x} p(u)\,du}}{e^{\int_{x_0}^{x} p(u)\,du}} \to 0$$

$$y'(x) + \frac{9x}{3x+1} \cdot y = \frac{\log x}{x}, \quad x>0$$

~o ~o ~o

Υπόδειξη :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s,x)\,ds = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial f(s,x)}{\partial x}\,ds$$